绝密★启用前

2022年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

复变函数与积分变换

（课程代码　02199）

注意事项：

1．本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2．应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3．涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共12小题，每小题3分，共36分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1．设$z=1-2\mathrm{i}$，则$\mathrm{Im}(z^2)=$

A．-4　　B．-3　　C．3　　D．4

2．复数$z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$的辐角主值是

A．$-\dfrac{3}{4}\pi$　　B．$-\dfrac{\pi}{4}$　　C．$\dfrac{\pi}{4}$　　D．$\dfrac{3}{4}\pi$

3．$f(z)=1-\overline{z}$在$z=0$处

A．不连续　　B．连续　　C．可导　　D．解析

4．设$z=x+\mathrm{i}y$，$f(z)=-y+\mathrm{i}(x+1)$，则$f'(z)=$

A．i　　B．$-1+\mathrm{i}$　　C．-1　　D．0

5．设C为由点$z=0$到点$z=\mathrm{i}$的直线段，则$\int_C z^2\,\mathrm{d}z=$

A．$-\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$-\dfrac{\mathrm{i}}{3}$　　D．$\dfrac{\mathrm{i}}{3}$

6．设C为正向圆周$|z|=2$，则$\oint_C \dfrac{\cos z}{(z-1)^2}\mathrm{d}z=$

A．$-\sin 1$　　B．$\sin 1$　　C．$-2\pi\mathrm{i}\sin 1$　　D．$2\pi\mathrm{i}\sin 1$

7．设C为正向圆周$|z|=2$，$f(z)$为解析函数，则$\oint_C \dfrac{zf(z)}{z^2-1}\mathrm{d}z=$

A．$\pi\mathrm{i}\left[f(1)+f(-1)\right]$　　B．$\pi\mathrm{i}\left[f(1)-f(-1)\right]$

C．$2\pi\mathrm{i}\left[f(1)+f(-1)\right]$　　D．$2\pi\mathrm{i}\left[f(1)-f(-1)\right]$

8．当$|z|<1$时，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$的和函数为

A．$\dfrac{z^2}{1-z^2}$　　B．$\dfrac{z^2}{1+z^2}$　　C．$\dfrac{1}{1-z^2}$　　D．$\dfrac{1}{1+z^2}$

9．$z=0$为函数$f(z)=\dfrac{1}{1-\cos z}$的

A．本性奇点　　B．可去奇点　　C．一阶极点　　D．二阶极点

10．设$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n, |z|<1$，则$\mathrm{Res}\left[\dfrac{f(z)}{z^2},0\right]=$

A．a_0　　B．a_1　　C．a_2　　D．a_3

11．函数$w=\mathrm{e}^{2z}$将带形区域$-\dfrac{\pi}{2}<\mathrm{Im}\,z<0$映射为

A．第一象限　　B．第四象限　　C．上半平面　　D．下半平面

12．设$f(t)=\cos t\sin t$，则其傅氏变换$F(\omega)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]$为

A．$\dfrac{\pi}{2}[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)]$　　B．$\dfrac{\pi}{2}[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]$

C．$\dfrac{\pi\mathrm{i}}{2}[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)]$　　D．$\dfrac{\pi\mathrm{i}}{2}[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)]$

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。

13. 设 $z=(\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}})^4$，则 $\mathrm{Re}\,z=$__________.

14. $\ln(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i})=$__________.

15. 设 $z=x+\mathrm{i}y$，$f(z)=-2xy+1+\mathrm{i}(x^2-y^2+1)$，则 $f'(z)=$__________.

16. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$，则 $\oint_C \frac{\sin z}{z^2}\,\mathrm{d}z=$__________.

17. 洛朗级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(z-1)^{2n}}$ 的收敛环域为__________.

三、计算题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

18. 已知解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 的虚部为 $v=2x^2-2y^2+y$，求 $f(z)$.

19. 设 C 为正向圆周 $|z|=4$，求 $\oint_C \frac{3z+5}{(z-1)(z+3)}\mathrm{d}z$.

20. 设 C 为正向圆周 $|\zeta|=2$，$f(z)=\oint_C \frac{\zeta^3+1}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta$，求 $f'(\mathrm{i})$.

21. 求 $f(z)=\frac{z-1}{z-3}$ 在 $z=1$ 的泰勒级数，并写出该级数的收敛区域.

22. 求 $f(z)=\ln(\frac{z^2}{1+z^2})$ 在圆环域 $1<|z|<+\infty$ 内的洛朗展开式.

23. 设 $f(z)=\frac{z+1}{z-1}$，求映射 $w=f(z)$ 在点 $z=\mathrm{i}$ 的旋转角和伸缩率.

四、综合题：本大题共 3 小题，共 19 分。

24.（本题 6 分）

设 $f(z)=\frac{1-z^2}{z(2z^2+5z+2)}$.

（1）求 $f(z)$ 在圆域 $|z|<1$ 内的所有奇点；

（2）求 $f(z)$ 在上述奇点处的留数；

（3）利用留数定理计算实积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{2\sin x}{5+4\cos x}\mathrm{d}x$.

25.（本题 6 分）

求分式线性映射 $w=w(z)$，将上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 保形映射为单位圆内部 $|w|<1$，并满足 $w(\mathrm{i})=0,\ w(0)=-1$.

26.（本题 7 分）

设函数 $y(t)$ 的拉氏变换为 $\mathscr{L}[y(t)]=F(p)$.

（1）求卷积 $\cos t * y(t)=\int_0^t \cos\tau\cdot y(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 的拉氏变换；

（2）利用拉氏变换解微分积分方程

$$\begin{cases} y'(t)-\int_0^t \cos\tau\cdot y(t-\tau)\mathrm{d}\tau=t,\quad t>0 \\ y(0)=0 \end{cases}.$$