绝密★启用前

2022年4月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数

（课程代码　02198）

注意事项：

1. 本试卷分为两部分，第一部分为选择题，第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡（纸）指定位置上作答，答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用2B铅笔，书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

说明： 在本卷中，A^{T}表示矩阵A的转置矩阵，A^*表示矩阵A的伴随矩阵，E是单位矩阵，$|A|$表示方阵A的行列式，$\mathrm{r}(A)$表示矩阵A的秩.

第一部分　选择题

一、单项选择题：本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1. 设$f(x)=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ x & 0 & 2\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}=-x+a$，则数$a=$

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

2. 设$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$，$A_{ij}$为元素$a_{ij}(i,j=1,2)$的代数余子式，若$A_{11}=1, A_{12}=2$，$A_{21}=3, A_{22}=4$，则$A=$

A．$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

C．$\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

3. 对于向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{21})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(a_{12},a_{22})^{\mathrm{T}}$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1=(a_{11},a_{21},a_{31})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(a_{12},a_{22},a_{32})^{\mathrm{T}}$，下列结论中正确的是

A．若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关

B．若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性相关

C．若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性相关

D．若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性相关，则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性无关

4. 设2阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，若$\boldsymbol{B}$的特征值$\lambda_1=-2,\lambda_2=3$，则$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$的迹为

A．-6　　B．-1　　C．1　　D．6

5. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+4x_3^2+6x_1x_2-2x_2x_3$的矩阵是

A．$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 3 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix}1 & 6 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

C．$\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix}1 & 6 & 0\\ 6 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}$

第二部分　非选择题

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 设 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$，其代数余子式为 $A_{ij}\ (i,j=1,2,3)$，

则 $A_{12}-A_{22}+2A_{32}=$________.

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=$ ________.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×4 矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{BA})=$________.

9. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________.

10. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

为________________________.

11. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,-9)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 的秩为________.

12. 若 3 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别是 $1,-1,2$，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=$________.

13. 若线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+3x_3=1 \\ x_2+ax_3=2 \end{cases}$ 无解，则数 $a=$________.

14. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(k,4,-6)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则数 $k=$________.

15. 二次型 $f(x_1,x_2)=-3x_1^2+4x_1x_2$ 经可逆线性变换 $\begin{cases} x_1=y_1-2y_2 \\ x_2=2y_1+y_2 \end{cases}$，化为二次型________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

17. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^*$.

18. 设矩阵 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}$ 满足关系式 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}$，若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

19. 确定 k 的值使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,k)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,k,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(k,1,1)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，并求出一个极大无关组，将其余向量由该极大无关组线性表出.

20. 求线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2-3x_4=-2 \\ x_1+2x_3-2x_4=-1 \\ 2x_1-2x_2+x_3-6x_4=-5 \\ -x_1+2x_2+3x_3+4x_4=2 \end{cases}$ 的通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 \\ y & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征值为 -3，且 $|\boldsymbol{A}|=-12$，求 x,y 的值.

22. 设 3 元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$，确定当 t 为何值时，该二次型正定.

四、证明题：本题 7 分。

23. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+6\boldsymbol{\alpha}_3$. 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.